Problema 1: Carga de Baterías

La empresa Logistik ha encontrado información más detallada sobre la evolución del estado de las baterías a lo largo del tiempo. Se sabe que la batería pasa por 5 grandes etapas: buen funcionamiento (1), desgaste bajo (2), desgaste intermedio (3), desgaste alto (4), y falla (5).
En un mes la batería pasa al siguiente nivel de desgaste con probabilidad q, y con la probabilidad restante permanece en el mismo nivel. En un mes se espera que una batería acumule 1000 horas de operación con probabilidad r, o 500 horas con la probabilidad restante. Puede suponer que esta acumulación de horas sucede siempre que la batería *inicie* el mes sin falla.
Siempre y cuando la batería esté sin falla, al inicio de cualquier mes, la empresa puede decidir no hacer nada o realizar un mantenimiento a la batería, el cual tiene un costo de L pesos y la batería queda en nivel de buen funcionamiento. El mantenimiento se realiza al inicio del mes, y la batería sigue acumulando las horas de operación luego del mantenimiento. Además, tras realizar el mantenimiento la batería seguirá en buen estado al inicio del siguiente mes.
En caso de que la batería falle, se debe reemplazar por una batería nueva, lo cual tiene un costo de $100L$ pesos. Note que toda batería nueva tiene 0 horas acumuladas de operación. Además, si la batería llega a las 100000 horas de operación también debe reemplazarse por una batería nueva. Cuando se reemplace la batería no hay acumulación de horas de operación.
Bajo estas condiciones, la empresa quiere realizar la planeación de la operación a largo plazo, que se debe traducir en una política óptima de mantenimiento y reemplazo de **una batería**.

a. Formule un modelo de decisión en el tiempo para apoyar las decisiones de la empresa en el largo plazo. Defina explícitamente todos los componentes de su modelo.

Solución:

Épocas: $E = \{1, 2, \ldots, \infty\}$ Es un problema de largo plazo, sin época terminal.
Variables de estado:

X_n: nivel de desgaste de la batería al inicio n-ésimo mes

Y_n: número de horas de operación acumuladas por la batería al inicio del n-ésimo mes

$Z_n = (X_n, Y_n)$

Espacios de estados:

- $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $S_Y = \{0, 500, 1000, 1500, \ldots, 100000\}$.
- $S_Z = S_X \times S_Y$ (aquí hay algunos estados inalcanzables como (i,0) con i¿1 pero se puede modelar sin excepciones y penalizar las decisiones y estados infactibles)

Espacio de acciones:

$$A(i,j) = \{N, M\},\ i \neq F,\ j \neq 100000.$$
$$A(i,j) = \{R\},\ i = F \text{ ó } j = 100000.$$

Costos inmediatos:

$$c(i,a) = \begin{cases} 0, & i \neq F, a = N, \\ L, & i \neq F, a = M, \\ 100L, & i = Foj = 100000, a = R. \end{cases}$$

Probabilidades de transición:

$$P^{(N)}_{((i,j),(i',j'))} = \begin{cases} q * r & i' = i+1, j' = \text{mín}\{j+1000, 100000\}, i < 5, j < 100000, \\ q * (1-r) & i' = i+1, j' = \text{mín}\{j+500, 100000\}, i < 5, j < 100000, \\ (1-q) * r & i' = i, j' = \text{mín}\{j+1000, 100000\}, i < 5, j < 100000, \\ (1-q) * (1-r) & i' = i, j' = \text{mín}\{j+500, 100000\}, i < 5, j < 100000, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

$$P^{(M)}_{((i,j),(i',j'))} = \begin{cases} r, & i' = 1, j' = \text{mín}\{j+1000, 100000\}, i < 5, j < 100000, \\ (1-r), & i' = 1, j' = \text{mín}\{j+500, 100000\}, i < 5, j < 100000, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

$$P^{(R)}_{((i,j),(i',j'))} = \begin{cases} 1, & i' = 1, j' = 0, i = 5, \\ 1, & i' = 1, j' = 0, j = 100000, \\ 0, & \text{dlc.} \end{cases}$$

Problema 2: Carga de Robot

La compañía alemana KUKA Roboter GmbH es uno de los principales fabricantes mundiales de robots industriales. Actualmente está trabajando en el diseño de un robot móvil cuya función será recoger latas vacías en el entorno de una oficina. El robot cuenta con una batería recargable como fuente de energía, la cual puede tener tres niveles de carga: alto, bajo y descargada. Cada 15 minutos el robot debe tomar alguna de las siguientes acciones: buscar activamente latas en la oficina, permanecer inmóvil esperando a que un humano le entregue una lata, o regresar a la base de operaciones para recargar la batería. Asuma que el tiempo que le toma al robot recargar su batería es de 15 minutos.
Se ha estimado que, en promedio, en 15 minutos el robot alcanza a encontrar una lata si decide buscar activamente en la oficina, y 0.5 latas si decide esperar a que un humano le entregue una lata. Si el robot se dedica a la búsqueda activa de latas, dependiendo de su nivel de carga, existe la posibilidad de que la batería se agote por completo; en dado caso, el robot se apaga, y es rescatado por alguien al final de los 15 minutos, que lo lleva a la

base de operaciones para recargar su batería. Si el robot permanece inactivo (esperando a que un humano le entregue una lata), no hay consumo de energía.
Si el nivel de la batería es alto, los diseñadores estiman que el robot puede buscar activamente latas sin que se descargue la batería. En este caso, al final del ciclo, el nivel de la batería será alto con probabilidad de α. Por el contrario, si se inicia la búsqueda activa de latas con un nivel de batería bajo, los experimentos realizados han demostrado que la probabilidad de que el robot se quede sin batería es β. Para realizar el entrenamiento del robot, **se busca maximizar el número de latas que el robot recoge a lo largo del tiempo.** Si al robot se le descarga la batería, este es penalizado con -3 latas.

a. Plantee un proceso de decisión de Márkov que permita maximizar las recompensas del robot en el largo plazo.
Solución

Épocas: $E = \{1, 2, \ldots, \infty\}$
Variable de estado:

X_t: Nivel de carga del robot al inicio de los t-ésimos 15 minutos

Espacio de estados:

$S_X = \{Alto, Bajo, Descargado\}$

Decisiones:

$A\{Descargado\} = \{Recargar\}$

$A\{Bajo\} = \{Buscar, Esperar, Recargar\}$

$A\{Alto\} = \{Buscar, Esperar\}$ o $\{Buscar, Esperar, Recargar\}$, ya que aunque no tenga sentido recargar, la optimización por si sola determinará que no es una opción eficiente.

Probabilidades de transición:

Buscar	**Descargada**	**Baja**	**Alta**
Baja	β	$1-\beta$	0
Alta	0	1-α	α

Esperar	**Descargada**	**Baja**	**Alta**
Baja	0	1	0
Alta	0	0	1

Recargar	**Descargada**	**Baja**	**Alta**
Descargada	0	0	1
Baja	0	0	1
Alta	0	0	1

Recompensas:

	Buscar	Esperar	Recargar
Alto	1	0.5	0
Bajo	1	0.5	0
Descargado	NA	NA	-3

Problema 3: Mantenimiento del Acueducto de Bogotá

La empresa de acueducto y alcantarillado de la ciudad de Bogotá (EAAB) es la responsable entre otros de realizar el mantenimiento de las tuberías, rejillas y alcantarillas del sistema de aguas de la ciudad. Los mantenimientos se realizan por localidades y el costo depende de la localidad y de la clasificación de la misma. La clasificación de una localidad está dada por el estado de su alcantarillado, rejillas y tuberías y da cuenta del nivel de riesgo de la misma. De acuerdo con lo anterior, una localidad puede estar clasificada como normal o en alerta y en estos casos el mantenimiento realizado se conoce como preventivo y correctivo respectivamente.
De acuerdo con datos históricos, se sabe que cuando una localidad está clasificada como normal tiene una probabilidad de 70 % de pasar a estado de alerta y que si se realiza un mantenimiento preventivo esta probabilidad se reduce a 30 %. Adicionalmente, se sabe que el mantenimiento correctivo tiene un 80 % de éxito.
Actualmente, la EAAB se encuentra implementando un plan piloto en dos localidades: Fontibón y Usme. En ese sentido, el costo de mantenimiento preventivo es de $90 millones de pesos en la localidad de Fontibón y de $55 millones de pesos en la localidad de Usme, mientras que el mantenimiento correctivo tiene un costo de $180 millones de pesos en la localidad de Fontibón y $175 millones de pesos en la localidad de Usme. Debido a restricciones de presupuesto, al inicio de cada mes, si la EAAB decide realizar mantenimiento, solo puede realizar un único mantenimiento en una de las localidades, sin importar que tipo de mantenimiento es.
Como consecuencia de las implicaciones sociales, ambientales, de salud, entre otras que tiene sobre una localidad el mal funcionamiento del sistema de aguas, la Alcaldía de Bogotá impone una multa a la EAAB por valor de $50 millones de pesos por localidad cuando no se realiza mantenimiento correctivo y la localidad se encuentra en alerta. Adicionalmente, se sabe que en el 70 % de los casos cuando la localidad de Fontibón está en alerta y no es atendida, produce una catástrofe por valor de $190 millones de pesos que deben ser asumidos en su totalidad por la EAAB. Para el caso de la Localidad de Usme, esta probabilidad es del 60 % y el costo es de $165 millones de pesos.
Hint: Tenga en cuenta que si al inicio de este mes la localidad de Fontibon se encuentra clasificada en Alerta y la localidad de Usme se encuentra clasificada como Normal y se decide intervenir la localidad de Fontibon, la probabilidad de que a inicios del siguiente mes la localidad de Fontibon y Usme se encuentren clasificadas como Normal es de 0.24.

a. Modele esta situación como un proceso de decisión Markoviano con el fin de minimizar los costos esperados en el largo plazo. **Sea explícito en la definición de**

los supuestos y los componentes de su modelo.

Solución

Épocas: $E = \{1, 2, \ldots, \infty\}$ **Variables de estado:**

X_t :Clasificación de la localidad de Fontibón al inicio de la época t
Y_t :Clasificación de la localidad de Usme al inicio de la época t
Z_t :$\{X_t, Y_t\}$

Espacio de estados:

$$S_X = \{\text{Normal (N), Alerta (A)}\}$$
$$S_Y = \{\text{Normal (N), Alerta (A)}\}$$
$$S_Z = S_X \times S_Y$$

Decisiones:

$$A((i,j)) = \{\text{Ningún Mantenimiento (NM), Fontibón (F), Usme (U)}\}$$

Probabilidades de Transición:

$$\boldsymbol{P}_{(i,j)\to(i',j')}(\text{NM}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} NN & NA & AN & AA \end{array} \\ \begin{array}{c} NN \\ NA \\ AN \\ AA \end{array} & \begin{bmatrix} 0.09 & 0.21 & 0.21 & 0.49 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{P}_{(i,j)\to(i',j')}(\text{F}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} NN & NA & AN & AA \end{array} \\ \begin{array}{c} NN \\ NA \\ AN \\ AA \end{array} & \begin{bmatrix} 0.21 & 0.49 & 0.09 & 0.21 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0.24 & 0.56 & 0.06 & 0.14 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{P}_{(i,j)\to(i',j')}(\text{U}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} NN & NA & AN & AA \end{array} \\ \begin{array}{c} NN \\ NA \\ AN \\ AA \end{array} & \begin{bmatrix} 0.21 & 0.09 & 0.49 & 0.21 \\ 0.24 & 0.06 & 0.56 & 0.14 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Retornos inmediatos:

	Costos		
	Decisiones		
Estado	NM	F	U
NN	0	90	55
NA	149	239	175
AN	183	180	238
AA	332	329	358

Problema 4: Represa de Alto Jatapu

El Ministerio de Ambiente en Brasil está interesado en realizar una planeación de la gestión para la represa de Alto Jatapu con el fin de alcanzar altos niveles de producción. Se sabe que la represa tiene cuatro niveles de llenado: Lleno, Alto, Medio y Bajo. Los niveles de llenado se pueden ver afectados por la lluvia en cada día de operación. Se sabe que, si un día llueve, la represa aumentará de nivel de llenado con probabilidad q. Tenga en cuenta que la probabilidad de que un día cualquiera llueva es de p. Al inicio de cada día, se pueden abrir y cerrar las compuertas de salida de la represa que permiten la generación de la energía. SI en un día las compuertas se mantienen cerradas, no sale agua a las turbinas de generación y no se produce energía. Por el contrario, si el nivel de llenado es i y si las compuertas se abren, el nivel de lagua de la represa disminuirá hasta llegar a Bajo (sin importar lo que pase con la lluvia), y se producirán δ_ikW de energía. Suponga que el precio por kW de energía es de $\$W$, y el costo por apertura de las compuertas es de $\$Z$ en cada día de operación. Además, se sabe que, si en un día la represa está llena y llueve, con probabilidad de q se ocasionará un derrame y la empresa incurrirá en un gasto de $\$R$ por reparar a las víctimas de las poblaciones aledañas. En estos casos la represa mantiene el nivel lleno al inicio del día siguiente. La apertura de compuertas permite mitigar el riesgo de derrame de la represa.

Nota: Tenga en cuenta que no hay probabilidad asociada a no llover y a la disminución de la represa.

a. Plantee un modelo de decisión en el tiempo con el objetivo de maximizar el ingreso recibido por la represa a través de la planeación de la producción de energía.

Solución:

Épocas: $E = \{1, 2, \ldots, \infty\}$
Variable de estado: X_t: Nivel de llenado de la represa al inicio del n-ésimo día
Espacio de estados: $S_X = \{Lleno, Alto, Medio, Bajo\}$
Decisiones: $A\{i\} = \{Abrir, NoAbrir\} \forall i \in S_X$
Retornos Inmediatos:
$r_{(i,Abrir)} = \delta_i \cdot W - Z \ \forall i \in S_X$
$r_{(i,NoAbrir)} = 0 \ \forall i \in S_X - Lleno$
$r_{(Lleno,NoAbrir)} = -R \cdot (p \cdot q)$
Probabilidades de transición:

$$\boldsymbol{P}_{(i)\to(j)}(\text{Abrir}) = \begin{array}{c} \\ Lleno \\ Alto \\ Medio \\ Bajo \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Lleno & Alto & Medio & Bajo \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{P}_{(i)\to(j)}(\text{NoAbrir}) = \begin{array}{c} \\ Lleno \\ Alto \\ Medio \\ Bajo \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Lleno & Alto & Medio & Bajo \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ p \cdot q & 1 - p \cdot q & 0 & 0 \\ 0 & p \cdot q & 1 - p \cdot q & 0 \\ 0 & 0 & p \cdot q & 1 - p \cdot q \end{bmatrix} \end{array}$$

Problema 5: Mantenimiento - Máquina de Extracción de Hidrocarburos

La compañía de petróleos YTF usa una sofisticada máquina para la extracción de hidrocarburos de difícil obtención en la Orinoquía Colombiana. Al inicio de cada mes, el jefe de operación debe revisar las condiciones de avería de la máquina y determinar si ésta debe ser intervenida o no. Dado que la máquina puede tener diferentes grados de deterioro, la compañía ha decidido agruparlos en tres categorías que son: perfectas condiciones, con defecto o avería total.

Se ha estimado que la máquina en perfectas condiciones puede presentar algún defecto en el mes siguiente con una probabilidad de 0.09 o pasar a una situación de avería total con una probabilidad de 0.01. Trabajando con defecto, la máquina puede mantenerse en ese estado el mes siguiente con una probabilidad de 0.55 o pasar a un estado de avería total con una probabilidad de 0.45.

El jefe de operación puede decidir si envía a reparar la máquina, la sustituye por una nueva o simplemente la deja como está. La sustitución implica la llegada de una máquina en perfectas condiciones para el mes siguiente en el que fue tomada la decisión. En el caso de enviar a reparar la máquina, se debe tener en cuenta que si la reparación se hace cuando la máquina se encuentra con defecto, en el 80 % de las veces la máquina queda perfecta y en el restante la máquina continua con defecto. Si la reparación es realizada cuando la máquina se encuentra en avería total, en un 30 % de los casos la máquina queda en perfectas condiciones y en el restante, la máquina continua averiada totalmente.

Si se toma la decisión de enviar a reparar la máquina, se acarreará en un costo de $30k y la pérdidas en productividad de un mes de extracción que tiene un costo de $20k. En caso de realizar la sustitución de la máquina, se acarreará en costos iguales a $60k y la perdida de un mes de extracción. En caso de trabajar con la máquina defectuosa, se prevé que YTP incurre en costos iguales a $10k, si la máquina se encuentra averiada totalmente no hay extracción de petroleo.

a. Usando la información anterio formule un proceso de decisión en el tiempo que le permita al jefe de operación determinar la política de decisión que **minimiza los costos totales**. Defina explícita y claramente todos los componentes de su modelo.

   Solución:

   Épocas: $E = \{1, 2, \ldots, \infty\}$
   Variable de estado: X_t: Grado de deterioro de la máquina extractora al inicio del n-ésimo mes
   Espacio de estados: $S_X = \{\text{Perfecta}(P), \text{Defecto}(D), \text{Avería}(A)\}$
   Decisiones: $A\{i\} = \{\text{No hacer nada}(N), \text{Reparar}(R), \text{Sustituir}(S)\} \forall i \in S_X$
   Probabilidades de Transición:

$$\boldsymbol{P}_{(i)\to(j)}(\text{R}) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P & D & A \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ D \\ A \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{P}_{(i)\to(j)}(\mathrm{N}) = \begin{array}{c} \\ P \\ D \\ A \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & D & A \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.09 & 0.01 \\ 0 & 0.55 & 0.45 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{P}_{(i)\to(j)}(\mathrm{S}) = \begin{array}{c} \\ P \\ D \\ A \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & D & A \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de retornos:

	Decisiones		
Estado	N	R	S
P	0	50	80
D	10	50	80
A	20	50	80